УДК 550.831+550.83.01

© Ю. Дубовенко, к.ф.-м.н.
Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта в задачі Алексідзе

Нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа постулює аналітичне продовження сили тяжіння в глобальних областях. Її розв'язок як потенціал простого шару на поверхні Ляпунова є послідовністю розв'язків зовнішніх граничних задач Неймана для рівняння Лапласа, якщо розв'язок не дуже ухиляється від заданого. Густина простого шару визначається з інтегрального рівняння Фредгольма. Вказані умови коректності.

Nonlinear boundary Alexidze problem postulates the global gravity analytical prolongation. Its solution as a simple layer potential is a sequence solutions of external boundary Neumann's problems for Laplace's equation provided that solution not greatly deviated from given one. Simple layer density is defined from the Fredholm integral equation. The conditions of the corectness are demonstrated.

Актуальність проблеми. Вирішення прикладних завдань гравіметрії і геодезії, пов'язаних з вивченням фігури, внутрішньої будови Землі, чи проявів її зовнішнього гравітаційного поля, потребує відомостей про розподіл значень потенціалу сили тяжіння чи модуля його градієнта. Для тлумачення даних аномалій потенціальних полів мало створити надійну методику побудови на їх основі геологічно змістовних моделей глибинної будови земної кори; вона має бути адекватною вимогам сьогодення. Методи видобутку з накопичених геофізичних даних всієї повноти необхідної інформації недостатньо розвинуті. Чинні методи трансформації потенціальних полів [1, 2] завершують теорію потенціалу і інформативні у вивченні локальних особливостей приповерхневої будови планети: вони дають змогу розв'язувати з достатньою точністю ту чи іншу задачу лише за умови задання вхідної інформації в локальних областях певної малої міри. Спроби стикувати результати локальних розв'язків при відновленні інформації в глобальному масштабі зазнають невдачі [3] через відсутність точних граничних даних для розв'язання відповідних граничних задач – Діріхле, Неймана, Стокса-Молоденського – для рівняння Лапласа. Немає змоги і прямо вимірювати значення гравітаційного потенціалу, зате доступні дані гравімагнітних спостережень, що є значеннями приростів модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГП-СТ). Варто скористатися ними при розробці схем трансформацій потенціалу в глобальній області.

Серед трансформацій потенціальних полів чільне місце посідає задача наближеного аналітичного продовження потенціалу сили тяжіння: в моделі геологічного середовища наближено задано або диференціальний оператор, або граничні умови. Найчастіше використовують модель з точним диференціальним оператором (гармонічна апроксимація значень сили тяжіння $g_н(x)$) в задачі Молоденського [4]. Відновити з гарантованою точністю поле сили тяжіння у зовнішньому просторі за його гармонічним наближенням можна шляхом розв'язання відповідної граничної задачі в області малої міри, оскільки у вищезгаданих граничних задачах дані спостережень слугують лише наближеними граничними умовами через негармонічність відповідних функцій. Через негармонічність оператора трансформанти [5] (принаймні, на суходолі) різко зростає похибка визначення потенціалу $g_н(x)$ зі збільшенням розміру локальної області. Трансформації на основі цих задач мають гарантовану точність лише в областях малої міри (як правило, 1°×1° і з точністю до невизначеної сталої, залежної від геометрії області). Гарантована точність розв'язку суттєво залежить від геометрії (рельєфу і розмірів) локальної області [6], а критерії для поєднання локальних розв'язків в глобальних побудовах відсутні.

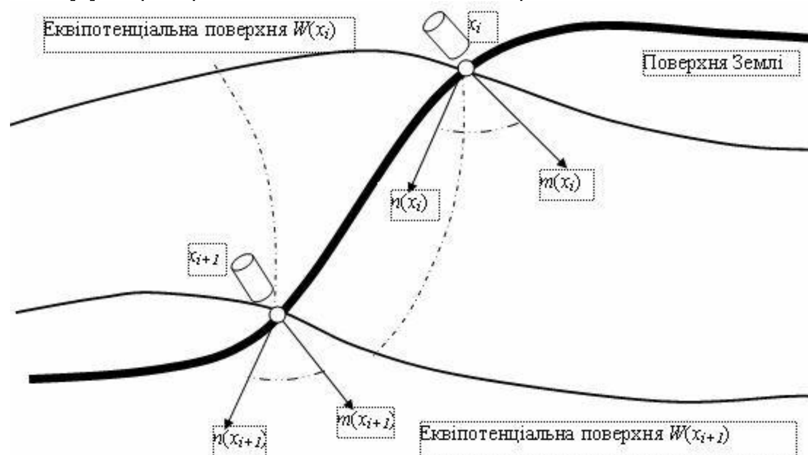


Рис. 1. Розходження векторів реальної і нормальної сили тяжіння.

У класичному способі визначення гравіаномалій $g_н(x)$ не враховують те, що в точках земної поверхні вектори реальної і нормальної сили тяжіння можуть мати *різні напрями* через розходження поверхні земного рельєфу та референц-еліпсоїда (рис. 1), що особливо яскраво проявляється на стику континент-океан і гірських районах. Просторову орієнтацію гравіметрів (нахили приладів, зумовлені різним ступенем кривизни еквіпотенціальних поверхонь, що проходять через задані пункти вимірювань) характеризує приріст кута $\alpha_i = \cos(n_i, m_i) - \cos(n_{i+1}, m_{i+1})$ між нормалями до земної та еквіпотенціальної поверхонь в точці вимірювань. Ні цю, ані жодну іншу величину, скажімо, значення напрямних косинусів $\cos(n, x_i),\ i = \overline{1,3}$, що виз-

начають напрям сили тяжіння, не вимірюють через складність організації таких спостережень в польових умовах. Розходження (приріст) цих напрямів в реальних умовах коливається від 0" до 40" і може призвести до того, що глибинні неоднорідності, які зумовлюють ці розходження, не відображатимуться в класичних аномаліях.

Способи розв'язання. Необхідність вивчення нелінійної граничної задачі відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями МГПСТ продиктована практичною непридатністю класичних схем відновлення потенціалу в глобальній області. При переході до глобальних побудов густинних моделей земної кори на основі даних регіональних спостережень слід розв'язати задачу аналітичного продовження аномалій сили тяжіння, сформульованої в [3]. В праці [6] для цього окреслено дві альтернативи, виходячи з аналізу характеристичних властивостей МГПСТ.

Перша з них – відшукання такого диференціального оператора, що анулює значення МГПСТ поза областю розташування тяжіючих мас, та розв'язання для нього відповідної лінійної граничної задачі, зосібна, зовнішньої задачі Діріхле для *лінійного* диференціального рівняння типу Клейна-Гордона (яке моделює значення МГПСТ в області, не зайнятій тяжіючими масами) з невідомим змінним коефіцієнтом, що відповідає обраному нормальному потенціалу. Подібному рівнянню задовольняють і аномалії сили тяжіння [5]. Цей спосіб ефективний для продовження аномалій сили тяжіння, а у випадку продовження значень повного градієнта потенціалу не дає бажаних наслідків. В [3] обґрунтована і реалізована подібна схема у вигляді послідовності розв'язків задачі Неймана для рівняння Лапласа, які визначають збурювальний потенціал.

Друга альтернатива — постановка такої *нелінійної* граничної задачі для рівняння Лапласа, в крайових умовах якої безпосередньо задіяні значення сили тяжіння. Таку задачу вперше сформулював Алексідзе в роботі [3], а в [6] її переформульовано з граничними даними для класу поверхонь Ляпунова за умови, що відновлюваний потенціал не дуже відхиляється від заданого.

Ради пошуку точніших способів відновлення наближень сили тяжіння довелось вийти за рамки задачі Діріхле і шукати уточнення коефіцієнта рівняння, первісно обчисленого для нормального потенціалу, що призвело до побудови послідовних наближень потенціалу за граничними значеннями МГПСТ. Перехід до задачі відновлення потенціалу усунув необхідність обчислення наступних наближень як коефіцієнтів рівняння сили тяжіння, так і самих значень сили тяжіння, оскільки останні тепер можна знайти не лише з розв'язання задачі Діріхле для рівняння сили тяжіння, а і (що простіше) з безпосереднього диференціювання відновленого потенціалу.

У зв'язку з цим некласична задача гравіметрії про відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ набуває особливої ваги в колі обернених задач теорії потенціалу. Один з можливих способів її вирішення розроблений в праці [7], інший – названий „гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа" – пропонуємо вашій увазі.

Постановка задачі [8]. Предметна модель задачі відновлення потенціалу за МГПСТ – проста модель Землі як абсолютно твердого тіла, близького до тіла обертання, що рухається рівномірно вздовж орбіти, обертаючись навколо осі з постійною кутовою швидкістю (без прецесії і нутації). Якщо y^- – обмежена область простору $R^{(3)}$, зайнята масами Землі, y^+ – необмежене доповнення до y^-, вільне від тяжіючих мас, ∂y – фізична поверхня Землі – границя множин y^- і y^+, то в прямокутній декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі Землі, осі Ox_1, Ox_2 якої лежать в екваторіальній площині, а вісь Ox_3 співпадає з віссю обертання, потенціал сили тяжіння мас всередині Землі $M(\xi)$ $\xi \in y^-$ з густиною $dM(\xi) = \sigma(\xi)d\xi$ такий:

$$W(x) = f\int_{y^-}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|}d\xi + \begin{cases}\Omega(x), & x \in y^- \\ 0, & x \in y^+\end{cases}, \qquad (1)$$

де f – гравітаційна стала, $\Omega(x) = 0.5\omega^2(x_1 + x_2)$ – потенціал центробіжної сили, ω – модуль вектора кутової швидкості Землі. Напруженість поля (значення МГПСТ за [4]) дорівнює

$$g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\bar{g}(x), \bar{n}(x)), \qquad (2)$$

де $\dfrac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k),\ k = 1,2,3$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\bar{n}(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $dW(x): W(y) = Cx$, яка проходить через точку x (рис. 1).

Нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа: необхідно знайти функцію $W(x),\ x \in y^+$, яка задовільняє всередині необмеженої замкнутої області $\bar{y}^+ = y^+ \cup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0,\ x \in y^+$, якщо в будь-якій точці ляпуновської границі ∂y області і в нескінченно віддаленій точці вона задовільняє умовам: $\sum_{k=1}^{3}\left(\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}\right)^2 = g^2(x),\ x \in \partial y,\ W(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, де $g(x)$ – задана неперервна функція.

Гармонічну в області y^+ функцію $W(x),\ x \in y^+$ природньо шукати як потенціал простого шару [9] типу (1) (без урахування центробіжної складової $\Omega(x)$) з невідомою густиною $\sigma(x),\ x \in \partial y$ (інтегрованою, хоч

загалом може бути більш гладкою), поширеною на поверхні Ляпунова ∂y. Рівняння, з якого відновлюють невідому густину $\sigma(x)$ за заданими на поверхні ∂y значеннями $g(x)$ МГПСТ, виведено, виходячи із зображення:

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\partial y} \int_{\partial y} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2} \frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2} \cos(p,q) dS_\eta dS_\xi , \qquad (2')$$

де одиничні вектори p і q, спрямовані відповідно з точки x в точки ξ і η, що пробігають по поверхні ∂y, мають вигляд $p_i = \cos(p, x_i) = \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|}$, $q_i = \cos(x_i, q) = \frac{x_i - \eta_i}{|x-\eta|}$, а кут між самими векторами – $\cos(p,q) = \sum_{i=1}^{3} \cos(p,x_i)\cos(x_i,q) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|} \frac{x_i - \eta_i}{|x-\eta|}$.

Аналітичні властивості функції МГПСТ $g(x)$ характеризує таке твердження [10]: МГПСТ не задовільняє рівнянню Лапласа в жодній точці області y^+, що випливає з подання (2).

Крім того, функції МГПСТ $g(x)$ простого шару властива неперервність, що випливає з наступної леми.

Лема 1. Модуль градієнта потенціалу простого шару є неперервною функцією точки $x \in \partial y$, яка рухається по поверхні ∂y Ляпунова.

Лема 2. МГПСТ простого шару, поширеного на сфері радіуса ρ з одиничною поверхневою густиною $\sigma(x) = 1,\ x \in \partial y$, визначає вираз

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\partial y} \int_{\partial y} \frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2 |x-\eta|^2} dS_\eta dS_\xi = \begin{cases} \rho^4 / |x|^4, & |x| > \rho \\ 1/4, & |x| = \rho \\ 0, & |x| < \rho \end{cases}.$$

Це означає, що функція $g^2(x)$ розривна, і має розрив неперервності *при переході* точки x через поверхню ∂y. Доведено, що величина цього розриву при $\sigma(x) \equiv 1$, $x \in \partial y$ за умови $\frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} \frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2} dS_\xi = \frac{1}{2}$ для сфери дорівнює $g_e^2(x) - g_0^2(x) = 3/4$, $x \in \partial y$, що узгоджується з лемою 2.

Розв'язання задачі. Якби на поверхні Землі (рівняння якої є заданим), крім значень МГПСТ $g(x),\ x \in \partial y$ і внутрішньої нормалі $\overline{m}(x)$ до ∂y, вимірювали *напрямок градієнта* $\overline{n}(x)$, задача відновлення потенціалу сили тяжіння $W(x),\ x \in y^+$ звелась би до розв'язання зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\nabla^2 W(x) = 0,\ x \in y^+,\ \frac{\partial W(x)}{\partial m} = \Phi(x),\ x \in \partial y,\ W(x) \to 0,\ |x| \to \infty, \qquad (3)$$

зауважуючи, що $\Phi(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial m} - \frac{\partial \Omega(x)}{\partial m} = g(x)\cos^2(n,m) - \omega^2 \sum_{k=1}^{3} c$, $\cos(n,m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(n,x_k)\cos(x_k,m)$.

Але напрямок нормалі $\overline{n}(x)$ (рис.1) невідомий через виняткову складність і вартість вимірювань. Граничні дані задачі відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ $g(x) = |-\nabla W(x)|$, у рамках прийнятої моделі описує вираз

$$g^2(x) = g^2(x) \left\{ 1 - 2g^{-1}(x) \sum_{k=1}^{2} \cos(n,x_k) \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k} + g^{-2}(x) \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k} \right)^2 \right\}, \qquad (4)$$

або [6] $g_i(x) = g_{i-1}(x) \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[\cos(n,x_k) - g^{-1}(x) \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k} \right]^2 \right\}$, через те, що $\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_3} = 0$.

Введімо нормальний потенціал, що генерується фіктивними масами, що дорівнюють масам в y^-, але розташовані в певному сенсі “нормально” в деякій іншій області y_0 простої геометрії з границею ∂y_0, яка не дуже відхиляється від земної поверхні ∂y. Подаймо потенціал притяжіння у вигляді суми $W(x) = U(x) + T(x)$

нормального $U(x)$ і збурювального $T(x)$ потенціалів, завдяки чому збурювальний потенціал описує відхилення реального розподілу мас в y^- від нормального. Нехай $\vec{\nu}(x)$ – одинична внутрішня нормаль до поверхні $\partial U_x : U(y) = C_x$, а $\gamma(x) = |-\nabla U(x)|$ – модуль градієнта нормального потенціалу, і задані напрямні косинуси $\cos(\nu, x_k)$, $\cos(x_k, m)$ внутрішніх нормалей $\vec{\nu}(x)$, $\overline{m}(x)$ до поверхонь ∂U_x і ∂y, а разом з ними і $\cos(\nu, m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(\nu, x_k)\cos(x_k, m)$. За таких припущень відновити потенціал притяжіння $W(x),\ x \in y^+$ можна з граничної задачі (3) шляхом обчислення послідовних наближень $W^{(k)}(x),\ k = 0,1,2,\ldots,\infty$. Алгоритм такий:

1. за знайденими з попереднього *і*-го кроку наближеннями $\cos(n_i, x_k),\ k = 1,2,3$ напрямних косинусів нормалі $\overline{n}(x)$ визначаємо на границі ∂y за формулою (4) $i+1$-ше наближення сили тяжіння [7]

$$g_{i+1}^2(x) = g(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n_i, x_k) - g_i^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]\right)^{-1/2},\ x \in \partial y,$$

$$\cos(n_i, m) = \sum_{k=1}^{3}\cos(n_i, x_k)\cos(x_k, m),\ x \in \partial y,$$

$$\Phi_{i+1}(x) = g_{i+1}(x)\cos(n_i, m) = \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x \in \partial y;$$

2. знаходимо розв'язок зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta T_{i+1}(x) = 0,\ x \in y^+,\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m} = \Phi_{i+1}(x),\ x \in \partial y,\ T_{i+1}(x) \to 0,\ |x| \to \infty, \quad (5)$$

як потенціал простого шару мас неперервної густини $\delta_{i+1}(x),\ x \in \partial y$, розподілених з на поверхні ∂y:

$$T_{i+1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\delta_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ x \in y^+; \quad (6)$$

3. невідому густину обчислюємо з нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду [6]:

$$\delta_{i+1}(x) + \int_{\partial y} K(x,\xi)\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi = 2\Phi_{i+1}(x),\ x \in \partial y, \quad (7)$$

де $K(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$, $\cos(u,m) = \sum_{k=1}^{3}\cos(m, x_i)\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|}$, $u = x - \xi$.

4. Розв'язавши рівняння (7), наближено обчислимо з використанням (6) похідні потенціалу притягання

$$W_j^{(i+1)}(x) = \frac{\partial W^{(i+1)}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi,\ j = 1,2,3. \quad (8)$$

З (8) очевидно, що похідні наближень збурювального потенціалу визначаються у внутрішніх точках області y^+, а на її границі ∂y значення похідних з (8) *неможливо знайти* через неінтегровні особливості у підінтегральних функціях. Для продовження обчислень слід знати значення похідних збурювального потенціалу саме на границі ∂y, і для їх обчислення слід передбачити спеціальну регуляризацію інтегралів (8).

Якщо цю операцію виконано і знайдено значення похідних (8) в точках $x \in \partial y$, обчислюємо наступні наближення (крок 1 алгоритму)

$$\cos(n_{i+1}, x_k) = g_{i+1}^{-1}(x)V_k^{(i+1)}(x),\ x \in \partial y,\ g_{i+2}^2(x) = g(x)\left\{\sum_{k=1}^{3}\left[\cos(n_{i+1}, x_k) - g_{i+1}^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x}\right]^2\right\}^{-1/2},\ x \in \partial y$$

$$\Phi_{i+2}(x) = g_{i+2}(x)\cos(n_{i+1}, m) = \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x \in \partial y,$$

далі знову розв'язуємо граничну задачу (5-7), наростивши індекс $i+1$-го наближення збурювального потенціалу $T_{i+1}(x)$ і наближення $W^{(i+1)}(x) = U(x) + T_{i+2}(x)$ потенціалу притяжіння (кроки 2-4) і т.д.

Обгрунтування задачі. Заміна коректної задачі (5) розв'язком граничної задачі (6)-(7) і збіжності наближень $W^{(k)}(x)$ до потенціалу притяжіння $W(x),\ x \in y^+$ строго обгрунтувана на прикладі близької задачі [4]. Однозначність її розв'язку доводиться теоремою єдиності розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа

за МГПСТ через потенціал простого шару, зведеною до доведення збіжності чисельних наближень $W^{(k)}(x)$, $k = 0,1,2,...,\infty$ функції $W(x),\ x \in y^+$. Її ж легко довести, виявивши збіжність послідовності $\{T_k(x)\}$: зі збіжності $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(x) \to T(x)$ випливає збіжність $W^{(k)}(x) \to W(x),\ x \in y^+$, і збіжність до своїх границь будь-яких інших наближень, що однозначно визначаються за $T_k(x)$. Аналогічна стратегія справедлива і для даної задачі. Зокрема, справедливі наступні теореми [9].

Теорема 1. Якщо величиною $\varepsilon^2(x) = \dfrac{|\nabla T(x)|^2}{|\nabla U(x)|^2}$ можна знехтувати порівняно з $\varepsilon(x)$, то послідовність розв'язків $\{T_k(x)\}$ граничних задач (5) збігається до збурювального потенціалу $T(x)$ області y^-.

За умови $\|\cos(\nu, m)\| = 1$ (напрямок внутрішньої нормалі $\nu(x)$ до еквіпотенціальної поверхні ∂U_x збігається (або протилежний) з напрямком нормалі $\overline{m}(x)$ до поверхні Землі ∂y) задача зводиться до зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Формули (8), справедливі для внутрішніх точок області y^+, можна поширити на граничні точки $x \in \partial y$, на що вказує наступна теорема.

Теорема 2. За неперервної на границі ∂y функції густини потенціалу простого шару (6) граничні значення частинних похідних потенціалу 1-го порядку дорівнюють

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y} \frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|}\delta(\xi)dS_\xi + \frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k, m_x).$$

Ця формула непридатна для практичного обчислення похідних (через складність земного рельєфу), тому замість неї варто використовувати еквівалентну формулу

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y} [\delta(\xi) - \delta(x)]\frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|}dS_\xi + \frac{1}{2}\delta(x)\cos(x_k, m_x).$$

Це нелінійне рівняння, як і попередні, з теорем 1 і 2; за фіксації геометрії контактної поверхні $\partial y(y)$, заданої на класі Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$ задача знаходження густини потенціалу простого шару стає лінійною і має однозначне розв'язання.

Щодо невідомої густини потенціалу простого шару виведено нелінійне інтегральне рівняння сили тяжіння:

$$\frac{1}{4}\sigma^2(x) + \frac{\sigma(x)}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\cos(n,\rho)}{|x-\xi|^2}\sigma(\xi)dS_\xi + \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\eta dS_\xi = g^2(x),\ x \in \partial y. \quad (9)$$

Його розв'язок $\sigma(x),\ x \in \partial y$ еквівалентний розв'язку задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні ∂y Ляпунова, оскільки за будь-якого вибору густини потенціал простого шару задовольняє в області y^+ рівнянню Лапласа, а знайдене з (9) значення густини забезпечує виконання граничної умови. Питання розв'язності задачі Алексідзе редукується до вияснення умов існування, єдності і стійкості розв'язку рівняння (9).

Це рівняння можна спростити до такого вигляду:

$$\sigma^2(x) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\int\limits_{\partial y}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\eta dS_\xi = 2g^2(x),\ x \in \partial y. \quad (10)$$

Розв'язки рівнянь (9, 10) допомагають визначати не лише потенціал $W(x),\ x \in y^+$, а й значення МГПСТ в будь-якій точці необмеженої області y^+. Останні можна обчислити як за виразом (2'), так і за зручнішою для обчислень формулою

$$g^2(x) = \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{3}\left(\int\limits_{\partial y}\frac{x_k - \xi_k}{|x-\xi|^3}\sigma(\xi)dS_\xi\right)^2, \quad (11)$$

яка не вимагає обчислення двократного інтеграла.

Чисельні алгоритми. Зведення задачі Алексідзе з граничними даними на поверхні Ляпунова до розв'язання нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння (9) чи (10) дозволяє легко вивчити питання розв'язності та єдиності її розв'язків, і ефективно знаходити чисельні наближені розв'язки у випадку областей складної форми. Дослідження питання розв'язності задачі Алексідзе зводиться до вияснення умов коректності рівняння (9). Конструктивні умови єдиності, існування та стійкості розв'язку задачі, подані у вигляді відповідних теорем, дозволяють вказати такі ітераційні схеми для її обчислення.

Алгоритм 1. Для визначення густини потенціалу простого шару придатний ітераційний процес

$$\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y\ ,\ \sigma_{1,n+1}(x)=\sigma_{1,n}(x)+\sigma_{2,n}(x)\ ,\ \sigma_{2,n+1}(x)=A_1[\sigma_{2,n}(x)],\ n=\overline{0,\infty}\ ,$$

де $A_1[\sigma_{2,n}(x)]=b(x;\sigma_{1,n})-\int\limits_{\partial y}K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)dS_\xi$, $K_1(x,\xi;\sigma_1)=\dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial y}\dfrac{\sigma_1(\eta)}{\sigma_1(x)}\dfrac{\cos(p,q)}{|x-\eta|^2}dS_\eta$, і

$$b(x;\sigma_1)=\frac{1}{\sigma_1(x)}\left(g^2(x)-F_1(x;\sigma_1)\right).$$

Алгоритм 2. Визначенню послідовних наближень густини слугує ітераційний процес

$$\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y\ ,\ \sigma_{1,n+1}(x)=\sigma_{1,n}(x)+\sigma_{2,n}(x)\ ,\ \sigma_{2,n+1}(x)=A_2[\sigma_{2,n}(x)],\ n=\overline{0,\infty}\ ,$$

де $A_2[\sigma_{2,n}(x)]=b_1(x;\sigma_{1,n})-\int\limits_{\partial y}K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n}(\xi)dS_\xi$, $b_1(x;\sigma_1)=\left(g^2(x)-F_1(x;\sigma_1)-F_1(x;\sigma_2)\right)/\sigma_1(x)$

.

Алгоритм 3. Обчислення послідовних приростів густини з лінійних інтегральних рівнянь 2-го роду

$$\sigma_{2,n+1}(x)+\int\limits_{\partial y}K_1(x,\xi;\sigma_{1,n})\sigma_{2,n+1}(\xi)dS_\xi=b_1(x,\sigma_{1,n}),$$

щодо приростів $\sigma_{2,n}(x)=\sigma_{1,n+1}(x)-\sigma_{1,n}(x),\ n=\overline{0,\infty}$; $\sigma_{1,0}(x)=g(x),\ \sigma_{2,0}(x)=0,\ x\in\partial y$ густини.

Щоб замкнути теорію вирішення задачі Алексідзе, лишається дослідити питання скінченновимірної апроксимації її розв'язків, генерованих ітераційними процесами, і особливості чисельних процедур.

Висновок. Сформульована нова *нелінійна* гранична задача Алексідзе для відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ і вказано алгоритм її розв'язання як потенціалу простого шару (6), густину якого практично відшукують з рівняння (7). Знаходити густину з еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння сили тяжіння (9) недоцільно, але воно зручне для вивчення умов коректності її постановки з граничними даними на класі Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$. Задача Алексідзе з граничними даними на поверхні Ляпунова редукована до розв'язання двох еквівалентних нелінійних інтегральних рівнянь (9-10), що описують функцію сили тяжіння. У цих редукціях вона коректна у на парі банахових просторів, до яких належать вхідні дані і шуканий розв'язок.

1. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с. 2. *Веселов К.Е.* Гравиметрическая сьемка. – М.: Недра, 1986. – 312 с. 3. *Алексидзе М.А.* Редукция силы тяжести. – Тб.: Мецниереба, 1965. – 256 с. 4. *Пантелеев В.Л.* Физика Земли и планет. Курс лекций. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 260 с. 5. *Черный А.В.* Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1982, № 4. – С. 18-21. 6. *Черный А.В.* Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Дис… д. ф.-м.н.: 04.00.22 / К.: ИГФ НАНУ, 1991. – 429 с. 7. *Якимчик А.І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: А-реф. дис... к..ф.-м.н.: 04.00.22 / К. ІГФ НАНУ, 2001. 8. *Дубовенко Ю.І.* Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матер. наук. конф. „Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6-10 жовтня 2008 р. – Львів: Вид-во „Сполом", 2008. – С. 156-158. 9. *Чорний А.В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісник Київського університету. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72-80. 10. *Алексидзе М.А.* Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тб.: Мецниереба, 1985. – 412 с.

Надійшла до редколегії 22.05.2009